

Optimierung II – 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Vektor $x \in \{-1, 1\}^n$, sodass $a^T x = b$ gilt.

- Man formuliere ein eindimensionales Sensor-Lokalisations-Problem mit zwei Ankern, so dass die Lösung des Lokalisations-Problems die Lösung obiger binärer Gleichung liefert. Hinweis: In einer Dimension gibt es für Punkte mit gegebenem Abstand nur zwei Möglichkeiten, wie sie zueinander liegen können.
- Seien nun die Daten a, b so gegeben, dass das Problem eine eindeutige Lösung besitzt. Man gebe ein Beispiel an, bei dem dieses Problem nicht eindeutig lokalisierbar ist.
- Unter welchen Voraussetzungen ist das Problem in Teil (b) immer eindeutig lokalisierbar?

Aufgabe 2 Man betrachte das Polynom $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x, y) := 1 + 16x^4y^2 + 4x^2y^4 - 12x^2y^2$.

- Sei (P) das semidefinite Programm basierend auf den Monomen

$$1, x, y, xy, x^2, y^2, xy^2, x^2y,$$

mit dessen Hilfe festgestellt werden kann, ob p sich als Summe von Quadraten schreiben lässt (SOS-Darstellung). Wie viele lineare Gleichungen liegen in (P) vor und wie viele Freiheitsgrade?

- Man begründe, dass keine Monome auftreten können, bei denen die Summe der Exponenten größer als 3 ist.
- Man begründe, warum (P) keine zulässige Lösung besitzt.
- Man betrachte den Ansatz, eine Zerlegung $q(x, y)p(x, y) \equiv r(x, y)$ zu bestimmen mit SOS-Polynomen q und r . Dabei werde angenommen, dass der Grad von q maximal 2 sei. Sei z der symbolische Vektor der Monome in q und \tilde{z} der symbolische Vektor der Monome in r . Welche Dimensionen haben z und \tilde{z} ?
- Gegeben sei die Darstellung

$$z^T Q z \equiv q(x, y), \quad \tilde{z}^T R \tilde{z} \equiv r(x, y)$$

mit symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen Q und R . Wie viele lineare Gleichungen sind an Q und R zu stellen?

- Sei ein Polynom $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, für das die Summe der Exponenten in den auftretenden Monomen maximal 8 ist. Welche Dimension hat das semidefinite Programm, mit dessen Hilfe festgestellt werden kann, ob p eine SOS-Darstellung besitzt? Wie viele lineare Gleichungen sind zu stellen?

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 15.1.2025, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.