Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{K}$ eine konvexe Teilmenge eines reellen Vektorraumes. Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}$ heißt *extremal*, wenn für alle $x, y \in \mathcal{K}$ und $t \in]0,1[$ mit $(1-t)x + ty \in \mathcal{E}$ folgt, dass $x, y \in \mathcal{E}$ gilt. Ein Punkt $x \in \mathcal{K}$ heißt *Extremalpunkt*, wenn $\{x\}$ extremal ist. Falls $\mathcal{K}$ ein Polyeder ist, heißen die Extremalpunkte auch Ecken von $\mathcal{K}$ und die eindimensionalen Extremalmengen heißen *Kanten* von $\mathcal{K}$.
Sei $\mathcal{MC} = \operatorname{conv}\{xx^T \mid x \in \{-1,1\}^n\}$ das Max-Cut-Polytop zu einem Graphen mit n Knoten. Man Zeige: Sind U, V zwei Extremalpunkte von $\mathcal{MC}$, dann ist die Strecke

$$[U, V] = \{(1-t)U + tV \mid t \in [0,1]\}$$

eine Kante von $\mathcal{MC}$.

Aufgabe 2 Es sei $\mathcal{C}_5$ der Kreis mit 5 Knoten und Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{R}^5$. Man betrachte das ungewichtete Max-Cut-Problem

$$\max\{\tfrac{1}{4}L \cdot X \mid \operatorname{diag}(X) = e,\ \operatorname{Rang}(X) = 1,\ X \in \mathcal{S}^n_+\}, \qquad (\mathcal{MC})$$

wobei $L := \operatorname{Diag}(Ae) - A$ die Laplacematrix ist, sowie die semidefinite Relaxierung

$$\max\{\tfrac{1}{4}L \cdot X \mid \operatorname{diag}(X) = e,\ X \in \mathcal{S}^n_+\}. \qquad (P)$$

(a) Man berechne den Optimalwert von $(\mathcal{MC})$.

(b) Man verwende ein Computerprogramm (z. B. Matlab), um die Eigenwerte von

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -a & b & b & -a \\ -a & 1 & -a & b & b \\ b & -a & 1 & -a & b \\ b & b & -a & 1 & -a \\ -a & b & b & -a & 1 \end{pmatrix}$$

für $a = 0.8089$ und $b = 0.309$ (approximativ) zu bestimmen.

(c) Man folgere, dass der Optimalwert von (P) größer als 4.5 sein muss.

(d) Man entscheide, ob M im metrischen Polytop der Dimension 5 enthalten ist.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 22.1.2025, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.