Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $G := \mathcal{C}_5$ der Kreis mit 5 Knoten. Unter Zuhilfenahme eines Software-Programms (z.B. Python/Matlab/Octave) zeige man, dass die Lovasz-Zahl zu G mindestens 2.236 beträgt. (Hinweis: Wie würde eine Matrix aussehen, die für das semidefinite Programm zur Lovasz-Zahl zulässig ist und die Symmetrien des Kreises widergibt?)

Aufgabe 2

Sei

$$\mathcal{C}_n^* := \operatorname{conv}\{xx^T \mid x \in \mathbb{R}^n_+\}$$

der vollständig positive Kegel und

$$\mathcal{C}_n := \{X \in \mathcal{S}^n \mid y^T X y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n_+\}$$

der kopositive Kegel. Ferner sei

$$\mathcal{DNN}^n := \{X \in \mathcal{S}^n \mid X \geq 0, \ y^T X y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

der Doppelt Nicht-Negative Kegel. Weiter sei der nicht-negativ zerlegbare (Non-Negatively Decomposable) Kegel definiert als:

$$\mathcal{NND}^n := \{X \in \mathcal{S}^n \mid \exists \ M \in \mathcal{S}^n_+, \ 0 \leq N \in \mathcal{S}^n \ : \ X = M + N\}.$$

Man zeige:

(a) $\mathcal{C}_n^*$ und $\mathcal{C}_n$ sind bzgl. des Skalarprodukts $X \bullet Y := \operatorname{Spur}(X^T Y)$ dual zueinander.

(b) $\mathcal{DNN}^n$ und $\mathcal{NND}^n$ sind bzgl. des Skalarprodukts $X \bullet Y := \operatorname{Spur}(X^T Y)$ dual zueinander.

(c) Für die Horn-Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} x^T H x &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)^2 + 4x_2x_4 + 4x_3(x_5 - x_4) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4x_2x_5 + 4x_1(x_4 - x_5), \end{aligned}$$

und daher $H \in \mathcal{C}_5$. Man begründe ferner dass $H \notin \mathcal{NND}^5$. (Ein numerischer Nachweis reicht aus.)

Zusatzaufgabe

1. Für reelle Zahlen x_i und x_{i+1} formuliere man die Bedingung $x_{i+1} \geq x_i^2$ als Semidefinitheitsbedingung an eine passend definierte 2×2-Matrix.

2. Man gebe ein semidefinites Programm an, das äquivalent ist zu dem Problem

   $$(\tilde{P}) \qquad \min\ x_{n+1} \ \mid \ x_{i+1} \geq x_i^2 \ \text{ für } 1 \leq i \leq n, \quad x_1 = 2.$$

   (Man fasse mehrere Semidefinitheitsbedingungen in einer einzigen Semidefinitheitsbedingung an eine Block-Diagonalmatrix zusammen.)

3. Man gebe die Optimallösung von $(\tilde{P})$ an.

4. Lässt sich das semidefinite Programm aus Teil b) in polynomialer Zeit (polynomial in der Länge der Eingabedaten) mit einem Innere-Punkte-Ansatz bis auf eine relative Genauigkeit von 10% lösen?

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 29.1.2025, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.