Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 2. Übungsblatt

(**B**ewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

Aufgabe 1

Seien $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrische Matrizen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ seien

$$\mathcal{A}(x) := A^{(0)} - \sum_{i=1}^{n} x_i A^{(i)} \quad \text{und} \quad \phi(x) := \begin{cases} -\log(\det(\mathcal{A}(x))), & \text{falls } \mathcal{A}(x) \succ 0 \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichne.

1. Es sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(x) \succeq 0\}$. Man zeige: ϕ ist selbstkonkordant bezüglich S°.
2. Man berechne den Gradienten von ϕ.
3. Man berechne die Hesse-Matrix von ϕ.
   Hinweis: Zur Bestimmung der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{A}(x))^{-1}$ kann die Identität $\mathcal{A}(x)(\mathcal{A}(x))^{-1} \equiv I$ nach x_i abgeleitet werden.

Aufgabe 2

Man führe den Beweis zur Inneren Ellipse auch für den Fall $\|z\|_{H_x} = 0$ aus.

Aufgabe 3

Sei $S = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq \xi\}$. Man zeige, dass $\phi(x, \xi) := -\log(\xi^2 - \|x\|_2^2)$ bezüglich S° selbstkonkordant ist.
Hinweis: Man zeige zunächst, dass für $(x, \xi) \in S^\circ$ und $(h, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein lineares oder quadratisches Polynom q existiert, sodass $l(t) := \phi(x + th, \xi + t\eta) \equiv -\log(q(t))$ gilt und begründe dann, dass q mindestens eine Nullstelle besitzt.
Man skizziere die Menge S für den Fall $n = 3$.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 30.10.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen. Abgabe zu Beginn der Übung oder in der Vorlesung davor.