Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 3. Übungsblatt

(Bewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

Aufgabe 1

Man beweise die verallgemeinerte Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung aus Lemma 15.1.24. Man zeige also, dass für symmetrische Matrizen A und B, die für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$|x^T Bx| \leq x^T Ax$$

erfüllen, für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt: $(a^T Bb)^2 \leq a^T Aa \; b^T Ab$.

Aufgabe 2

Sei M eine symmetrische Trilinearform über $\mathbb{R}^2$. Für $x \in \mathbb{R}^2$ möge M_x wieder die Matrix bezeichnen, für die gilt: $M[x, y, z] = y^T M_x z$ für alle $y, z \in \mathbb{R}^2$.

1. Welche Möglichkeiten gibt es für M_{e_2} wenn $M_{e_1} := \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$ gegeben ist und e_i wieder den i-ten kanonischen Einheitsvektor bezeichnet?
2. Sei nun konkret $M_{e_2} := \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ gegeben und $H := \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Man werte die KKT-Bedingungen für das Problem
$$\max\{\ M[h, h, h] \ \mid \ h^T Hh \equiv const.\ \}$$
für eine gegebene Konstante *const.* aus. (Es sollten sich die möglichen Lösungen $h_1 = \pm h_2$ sowie $h_1 = 3h_2$ ergeben.)
3. Man werte $(M[h, h, h])^2/(h^T Hh)^3$ für obige Lösungen aus.
4. Sei $\phi(x) := -\ln(x_1 + x_2) - \ln(x_1 - x_2)$ und $\tilde{x} := \frac{1}{4}(3, 1)^T$. Man gebe die zweite und dritte Ableitung von ϕ an der Stelle $\tilde{x}$ an.

Aufgabe 3

Seien $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge und $\phi \ : \ \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R}$ eine selbskonkordante Barrierefunktion. Für $x \in \mathcal{S}^\circ$ sei $H(x) := \nabla^2\phi(x)$. Man zeige: Falls $H(\hat{x})z = 0$ für ein $\hat{x} \in \mathcal{S}^\circ$ und ein $z \in \mathbb{R}^n$, so ist $H(x)z = 0$ für alle $x \in \mathcal{S}^\circ$. (Hinweis: Abschätzung (15.1.20))

Programmieraufgabe

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\phi(x) := -25\ln(x_1) - 5\ln(x_2) - \ln(3 - x_1 - x_2)$ sofern alle Terme definiert sind und $\phi(x) := \infty$ sonst.
Man plotte die Euklidische Länge und die H-Norm des (ersten) Newton-Schritts zur Minimierung von ϕ für alle Startpunkte auf folgenden Strecken:

$$\left[\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.45 \\ 1.45 \end{pmatrix}\right], \qquad \left[\begin{pmatrix} 0.05 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.95 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \qquad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1.95 \end{pmatrix}\right].$$

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 6.11.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen. Abgabe zu Beginn der Übung oder in der Vorlesung davor. Abgabe der Programmieraufgabe am 13.11.