Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 4. Übungsblatt

(**B**ewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

Aufgabe 1 Es sei $\phi : \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R}$ eine selbst-konkordante Barrierefunktion bezüglich einer Menge $\mathcal{S}$ mit nichtleerem Inneren.

(a) Man zeige, dass die θ-Selbstbeschränkung von ϕ äquivalent ist zur Konkavität von Ψ mit

$$\Psi : \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R},\ \ \Psi(x) := \mathrm{e}^{-\phi(x)/\theta}.$$

(b) Man zeige, sofern der Newton-Schritt existiert, ist die Bedingung der θ-Selbstbeschränkung zur Forderung äquivalent, dass die $H(x)$-Norm des Newton-Schritts $\Delta x := -H(x)^{-1}\nabla\phi(x)$ global beschränkt ist durch

$$\|\Delta x\|_{H(x)} \le \sqrt{\theta} \quad \forall\ x \in \mathcal{S}^\circ.$$

Aufgabe 2

(a) Seien $\phi_i : \mathcal{S}_i^\circ \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2\}$ jeweils θ_i-selbstbeschränkend und sei $S_1^\circ \cap S_2^\circ \neq \emptyset$. Man zeige, dass $\phi_1 + \phi_2$ dann $(\theta_1 + \theta_2)$-selbstbeschränkend ist.

(b) Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung, d. h. es gilt $\mathcal{A}(y) = Ay + b$ für festes $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $\phi : \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R}$ wieder θ-selbstbeschränkend und $\mathrm{Bild}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}^\circ \neq \emptyset$. Man zeige, dass dann $\tilde{\phi} := \phi(\mathcal{A}(y))$ ebenfalls θ-selbstbeschränkend ist.

Aufgabe 3

(a) Seien $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei $\mathcal{S}^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) < 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}\}$ nichtleer. Man zeige: Die Funktion

$$\phi : \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R},\ \ \phi(x) := -\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x))$$

ist m-selbstbeschränkend.

(b) Sei $\mathcal{S}^n_{++} := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T = X,\ X \succ 0\}$ der Raum aller symmetrischen, positiv definiten $(n \times n)$-Matrizen. Man zeige, dass $\phi : \mathcal{S}^n_{++} \to \mathbb{R},\ \phi(X) := -\log(\det(X))$ θ-selbstbeschränkend ist und bestimme θ.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 13.11.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen. Abgabe zu Beginn der Übung oder in der Vorlesung davor.