

Optimierung II – 5. Übungsblatt

(Bewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

Aufgabe 1

Die Funktion ϕ sei definiert durch

$$\phi : \mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := x - \ln(x).$$

- Ist ϕ selbst-konkordant? Ist ϕ für ein geeignetes $\theta \geq 1$ eine θ -selbstbeschränkende Funktion? Wo liegt die Minimalstelle von ϕ ?
- Man führe einen Newtonschritt zur Minimierung von ϕ ausgehend von $x^{(0)} := 0.9$ durch und vergleiche die H -Norm des darauffolgenden Newtonschritts mit der durch Lemma 15.1.30 vorhergesagten Schranke zur Konvergenz des Newtonverfahrens bei selbst-konkordanten Funktionen.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{S} := \{X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \succeq 0, \text{ Spur}(X) \leq n + 1\}$ und

$$\phi(X) := -\ln(\det(X)) - \ln(n + 1 - \text{Spur}(X)) \quad \text{für } X \in \mathcal{S}^\circ.$$

- Man bestimme die Minimalstelle von ϕ .
- Man gebe die innere Ellipse für den semidefiniten Kegel (ohne die Spur-Nebenbedingung) im Punkt $X = I$ explizit an.
- Gibt es Punkte, an denen die innere Ellipse den Rand des semidefiniten Kegels berührt?
- Welcher Teil des semidefiniten Kegels wird durch die zugehörige äußere Ellipse der Vorlesung beschränkt?

Aufgabe 3

Seien A und B zwei symmetrische Matrizen mit $A \succeq B \succ 0$. Man zeige:

$$B^{-1} \succeq A^{-1} \succ 0.$$

2. Programmieraufgabe

Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Man betrachte die Funktion $\phi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) \equiv cx - \ln(1 - x^2).$$

Wie in Aufgabe 1 oben folgt, dass ϕ eine selbst-konkordante Barriere-Funktion für $S := [-1, 1]$ ist. Man zeige numerisch (auf 3 geltende Ziffern), dass für $c := 1,35$ die Funktion ϕ eine θ -selbst-konkordante Barriere-Funktion ist mit $\theta = 1,625$. Man bestimme die Nullstelle \bar{x} von ϕ' (für diese

Wahl von c) numerisch und bestimme die kleinste äußere "Ellipse" um \bar{x} in der $D^2\phi(\bar{x})$ -Norm (das ist hier ein Intervall mit Mittelpunkt \bar{x}). Wie vergleicht sich diese äußere "Ellipse" mit der äußeren Ellipse von Lemma 15.1.38?

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 20.11.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen. Abgabe zu Beginn der Übung oder in der Vorlesung davor. Abgabe der Programieraufgabe am 27.11.2024.