| Aufgabe | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | |

# Optimierung II – 6. Übungsblatt

(**B**ewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

## Aufgabe 1

Wir betrachten die Frage, ob die Determinante auf dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen konvex ist. Man zeige

1. Seien $X \succ 0$, $H \succeq 0$. Dann ist die Einschränkung der Determinante auf die Gerade $X + tH$ geschnitten mit dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen konvex.
   Hinweis: Man betrachte die 2. Ableitung von $t \mapsto \det(X + tH)$ unter Verwendung der 2. Ableitung von $t \mapsto \log(\det(X + tH))$.
2. Sei nun $H$ indefinit. Dann ist die Einschränkung der Determinante auf die Gerade $X + tH$ geschnitten mit dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen nicht konvex.
   Hinweis: Man betrachte die Randpunkte des Definitionsbereichs.

## Aufgabe 2

Seien $X, S$ symmetrisch mit $XS = SX$. Man zeige: Es gibt eine Orthonormalbasis von Vektoren, die alle sowohl Eigenvektoren von $X$ als auch von $S$ sind.

## Aufgabe 3

Man löse das folgende Problem mithilfe der Dualitätsbedingungen.

$$\min\{X_{1,1} + X_{2,2} + X_{3,3} \mid 6X_{1,2} + 8X_{2,3} = 1, \quad X \in \mathcal{S}^3_+ \}.$$

## Aufgabe 4

Gegeben sei das semidefinite Programm “$\min\{C \bullet X \mid \mathcal{A}(x) = b, \quad X \in \mathcal{S}^n_+ \}$” mit $b \in \mathbb{R}^n$, einer Diagonalmatrix $C$, und $(\mathcal{A}(x))_i \equiv A^{(i)} \bullet X$, wobei die $A^{(i)} = Diag(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ ebenfalls Diagonalmatrizen seien.
Man zeige, dass sich aus einer Optimallösung $X^*$ dieses Problems eine Optimallösung $x^*$ des linearen Programms “$\min\{c^T x \mid Ax = b, \quad x \geq 0 \}$” mit $c = diag(C)$ und $A = (a_{i,j})_{i,j}$ konstruieren lässt und umgekehrt.
Man gebe für beide Probleme jeweils das duale Problem an und zeige, dass die Lösungen der dualen Probleme (nach Eliminierung der Schlupfvariablen) übereinstimmen.

**Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 27.11.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.**