Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man gebe den kleinsten konvexen Kegel $K \subset \mathbb{R}^2$ an, der $(1,1)^T$ und $(1,2)^T$ enhält und den dazu dualen Kegel K^D. Seien ferner $b := (0,1)^T$, $c := (-1,1)^T$ und $\mathcal{L} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$. Man skizziere die Kegel und die zulässigen Mengen und die Optimallösungen x^{opt} und s^{opt} von

$$(P) \qquad \inf\{c^T x \mid x \in (\mathcal{L} + b) \cap K\}$$

sowie

$$(D) \qquad \inf\{b^T x \mid x \in (\mathcal{L}^\perp + c) \cap K^D\}.$$

Man verifiziere graphisch, dass x^{opt} und s^{opt} die einzigen jeweils zulässigen Punkte sind, die zueinander senkrecht stehen.

Aufgabe 2

1. Sei $A \in \mathcal{S}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Man zeige: $A \succ 0 \Longleftrightarrow B^T AB \succ 0$.
   Gelten auch $A \succ 0 \Longleftrightarrow B^{-1}AB \succ 0$ bzw. $A \succ 0 \Longleftrightarrow B^{-1}AB + (B^{-1}AB)^T \succ 0$?
2. Seien $A, B \in \mathcal{S}^n$, $A \succ 0$ und $0 \neq B \succeq 0$. Man zeige: $A \bullet B > 0$.
3. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume. Man zeige $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.
4. Zu einer Matrix $A \in \mathcal{S}^n$ wird eine Haupt-Untermatrix durch Auswahl einer Teilmenge $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k \leq n$ bestimmt. Die Haupt-Untermatrix besteht dann aus den Zeilen und Spalten von A, die zu I gehören (in aufsteigender Reihenfolge). Falls $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $k \leq n$ so ergibt sich eine “führende Haupt-Untermatrix”. Die zugehörigen Determinanten heißen Haupt-Unterdeterminanten.

   Wie viele verschiedene Haupt-Untermatrizen gibt es?

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Ohne Beweis)

   a) $A \succ 0 \Longleftrightarrow$ alle Haupt-Unterdeterminanten sind positiv.
   b) $A \succ 0 \Longleftrightarrow$ alle führenden Haupt-Unterdeterminanten sind positiv.
   c) $A \succeq 0 \Longleftrightarrow$ alle Haupt-Unterdeterminanten sind nicht-negativ.
   d) $A \succeq 0 \Longleftrightarrow$ alle führenden Haupt-Unterdeterminanten sind nicht-negativ.

Aufgabe 3

Seien $A \succeq B \succeq 0 \in \mathcal{S}^n$. Man zeige: $A^{1/2} \succeq B^{1/2}$.
(Sei λ ein Eigenwert von $A^{1/2} - B^{1/2}$. Um $\lambda \geq 0$ zu zeigen multipliziere man die Gleichung $A^{1/2}x - \lambda x = B^{1/2}x$ von links mit $(A^{1/2}x)^T$ und nutze die Cauchy-Schwarz- Ungleichung.)

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 4.12.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.