

Optimierung II – 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $S_P : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{S}^n$ definiert durch $S_P(U) := \frac{1}{2}(PUP^{-1} + (PUP^{-1})^T)$. Sei ferner $X \in \mathcal{S}^n$ mit $X \succ 0$ gegeben und $\mathcal{F} : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ definiert durch $\mathcal{F}(S) = S_P(XS)$. Man gebe die adjungierten Operatoren von S_P und \mathcal{F} an. (Welches sind die Definitionsbereiche und Bildbereiche?)

Aufgabe 2 Zur Lösung des primal-dualen Gleichungssystems

$$\mathcal{A}^*(y) + S = C, \quad \mathcal{A}(X) = b, \quad XS = \mu I$$

linearisiere man zunächst die Gleichungen $XS = \mu I$ und $SX = \mu I$ unabhängig voneinander und bilde anschließend das arithmetische Mittel der beiden entstandenen Suchrichtungen. Man zeige, dass man auf diese Weise die HKM-Suchrichtung erhält.

Aufgabe 3 Man zeige, dass die Anwendung des Symmetrisierungsoperators

$$S_P(U) := \frac{1}{2}(PUP^{-1} + (PUP^{-1})^T)$$

auf das primal-duale System eines semidefiniten Programms für die Wahl $P = S^{1/2}$ die HKM-Suchrichtung liefert.

Aufgabe 4 Seien \mathcal{A}, b, C wie in der Vorlesung und $M := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \mathcal{A}^*(y) \preceq C\}$. Für einen reellen Parameter $\mu > 0$ sei $\varphi_\mu : M^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_\mu(y) := -\frac{b^T y}{\mu} - \log \det(C - \mathcal{A}^*(y)).$$

Zu gegebenem $y \in M^\circ$ sei $\widetilde{\Delta}y$ der Newton-Schritt zur Minimierung von φ_μ . (Zur Berechnung von $\widetilde{\Delta}y$ siehe Aufgabe 1 von Blatt 2).

Zu gegebenem $y \in M^\circ$ sei ferner $S := C - \mathcal{A}^*(y)$ und $X := \mu S^{-1}$ und damit werde dann Δy mittels des Systems (16.2.5) der Vorlesung definiert.

1. Wie sind bei der obigen Wahl von X, y, S die Residuen r_P, R_D, R_K in (16.2.5) gegeben?
2. Man zeige, dass sich dann für jede Wahl von $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(P) \neq 0$ in (16.2.5) dieselbe Suchrichtung Δy ergibt und diese mit obigem $\widetilde{\Delta}y$ übereinstimmt.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 18.12.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.