Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

Aufgabe	26	27	28	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 10. Übungsblatt

Aufgabe 26 (6 Punkte)

Es sei $\sigma : \mathbb{R} \to (0,1)$ durch

$$\sigma(x) := \tfrac{1}{1+\exp(-x)}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie: Die Ableitung von σ erfüllt

$$\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x)).$$

(b) Wir betrachten für $\gamma \geq 0,\ b \in \{\pm 1\}^m$ und $A = (a_1, ..., a_m)^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Psi(w) := \tfrac{\gamma}{2}||w||_2^2 - \sum_{i=1}^{m} \log(\sigma(b_i(a_i^T w))).$$

Bestimmen Sie den Gradienten, sowie die Hessematrix und folgern Sie, dass Ψ konvex ist.

Aufgabe 27 (9 Punkte)

Zu Jahresanfang möchte ein (fiktiver) Schokoladenverkäufer die Jahresbestellung planen. Das Sortiment besteht aus Schokoladenfiguren in Form von Weihnachtsmännern und Osterhasen jeweils in den Varianten weiße Schokolade, Milchschokolade und Bitterschokolade. Für die relevante Kundengruppe wurde die folgende Nachfrage prognostiziert:

	Marktanteil
Weihnachtsmänner	140 Mio.
Osterhasen	190 Mio.

	Marktanteil
Weiße Schokolade	17% bis 19%
Milchschokolade	51%
Bitterschokolade	30% bis 32%

Die Bestellung möge die komplette Nachfrage decken. Als Variablen wählt der Verkäufer die prozentualen Anteile der Produktkombinationen (x_1 für den Anteil der Weihnachtsmänner aus weißer Schokolade, x_2 für den Anteil der Weihnachtsmänner aus Milchschokolade, usw.).
Beschreiben Sie die zulässigen Variablen durch lineare Gleichungen und Ungleichungen.

Aufgabe 28 (6 Punkte)

Es seien $x = 0$ und $d = 1$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass d eine Abstiegsrichtung von f in x ist, aber f für alle $\epsilon > 0$ auf dem Intervall $(0, \epsilon]$ nicht monton ist.

Hinweis: Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $d \in \mathbb{R}^n$ Abstiegsrichtung von f in x, falls ein $\bar{\epsilon} > 0$ existiert, so dass

$$f(x + td) < f(x)$$

für alle $t \in (0, \bar{\epsilon}]$ gilt.

Programmier-Aufgabe 5

Implementieren Sie das präkonditionierte CG-Verfahren (Algorithmus 6.3.7 aus dem Online Skript) in Matlab/Python/R. Erstellen Sie dazu eine Funktion `con_grad_lin`, die als Input `A, b, x0, epsilon, M` übergeben bekommt und als Output `x,it` zurückgibt. Dabei bezeichnet `A` eine symmetrische und positiv definite Matrix, `b` einen Spaltenvektor, `x0` den Startpunkt, `epsilon` den Parameter für das Abbruchkriterium und `M` den Präkonditionierer. Zurückgegeben werden soll die Lösung `x` und die Anzahl der ausgeführten Iterationen `it`.

Benutzen Sie das Verfahren mit $M = \mathrm{Diag}(\mathrm{diag}(\nabla^2 f(\texttt{x0})))$ um die folgenden Aufgaben zu lösen:

(a) Minimiere die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 3$$

auf $\mathbb{R}^2$ mit $\texttt{x0} = (5, -5)^T$ und $\texttt{epsilon} = 10^{-3}$.

(b) Minimiere die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 0.3x_1x_2 + 0.975x_2^2 + 0.01x_1x_3 + x_3^2 + 3x_1 - 4x_2 + x_3$$

auf $\mathbb{R}^3$ mit $\texttt{x0} = (0, 0, 0)^T$ und $\texttt{epsilon} = 10^{-8}$.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass pro Iteration höchstens einmal mit der Matrix `A` multipliziert wird.

Für die Bearbeitung der Programmieraufgabe haben Sie mehrere Wochen Zeit. Die Abgabefrist ist am 14.01.2026 um 12 Uhr.

Frohe Weihnachten!

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 07.01.2026 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.