Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

07.01.2026

Aufgabe	29	30	31	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 11. Übungsblatt

Aufgabe 29 (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \succ 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist die Minimalstelle von f mit

$$f(x) := \tfrac{1}{2}x^TAx - b^Tx.$$

Mit $g(x)$ bezeichnen wir den Gradienten von f an der Stelle x. Wir betrachten ein Abstiegsverfahren, das Iterierte x^k für $k \geq 1$ erzeugt. Zum Startwert $x^0 = 0$ werde dazu in jedem Schritt eine Suchrichtung ermittelt, die aus dem negativen Gradienten im aktuellen Punkt plus eine Linearkombination der Gradienten in früheren Iterierten besteht. Sei nun $\mathcal{K}_m$ die lineare Hülle von $x^1, x^2, \ldots, x^m$. (Man nennt $\mathcal{K}_m$ auch einen Krylow-Raum.)

(a) Man zeige, dass $\mathcal{K}_m$ unabhängig davon ist, welche Linearkombination oben gewählt wurde.

(b) Man zeige, dass das cg-Verfahren am Ende der m-ten Iteration die Funktion f auf $\mathcal{K}_m$ minimiert.

Aufgabe 30 (8 Punkte)

Für eine differenzierbare Funktion $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\phi'(0) < 0$ und für $c_1, c_2 \in (0,1)$ mit $c_1 \leq c_2$ sei

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in [0,\infty) \mid \phi(\lambda) \leq \phi(0) + \lambda c_1\phi'(0),\ \phi'(\lambda) \geq c_2\phi'(0)\}$$

die Menge der Wolfe-Bedingungen (A) zu den Parametern c_1, c_2.

(a) Für $c_1 = \frac{1}{10}, c_2 = \frac{1}{2}$ und

$$\phi(\lambda) = \tfrac{1}{147}\lambda^4 - \tfrac{16}{147}\lambda^3 + \tfrac{23}{42}\lambda^2 - \lambda \qquad \text{mit} \qquad \phi'(\lambda) = \tfrac{4}{147}(\lambda - \tfrac{3}{2})(\lambda - \tfrac{7}{2})(\lambda - 7)$$

skizzieren Sie auf dem Intervall $[0,9]$ die Funktion ϕ, die Ableitung ϕ', sowie die Funktion $\lambda \mapsto \phi(0) + \lambda c_1\phi'(0)$. Markieren Sie $\mathcal{S} \cap [0,9]$ auf Ihrer Skizze.

(b) Widerlegen Sie die folgenden Behauptungen jeweils durch eine Skizze:

  (a) Jede Minimalstelle von ϕ liegt in $\mathcal{S}$.

  (b) Die Menge $\mathcal{S}$ ist ein Intervall.

Aufgabe 31 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^\mathrm{T}Ax + b^\mathrm{T}x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 100 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste Iterierte $x_{\mathrm{CG}}^{(1)}$ des CG-Verfahrens angewandt auf f ausgehend von dem Startpunkt $x^{(0)} = 0$.

(b) Bestimmen Sie die erste Iterierte $x_{\mathrm{PCG}}^{(1)}$ des präkonditionierten CG-Verfahrens (siehe Skript, Seite 161 ff) angewandt auf f ausgehend von dem Startpunkt $x^{(0)} = 0$ mit dem Präkonditionierer

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

(c) Vergleichen Sie den Fehler von $x_{\mathrm{CG}}^{(1)}$ mit dem von $x_{\mathrm{PCG}}^{(1)}$ in der A-Norm und in der euklidischen Norm. Entsprechen die Ergebnisse Ihrer Erwartung?

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 14.01.2026 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.