Einführung in die Optimierung – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Klee-Minty-Beispiele, 24 Punkte)

Wir betrachten für $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgenden linearen Programme, deren zulässige Menge aus einem "deformierten Einheitswürfel" besteht:

$$\max\{\, x_n \mid \epsilon x_{i-1} \le x_i \le 1 - \epsilon x_{i-1} \;\text{ für }\; 1 \le i \le n\},$$

wobei wir $x_0 = 1$ fest setzen. (x_0 ist keine Variable sondern nur zur kompakteren Schreibweise eingeführt.)

(a) Man bringe dieses lineare Programm durch Einführung von Schlupfvariablen s_i für die Ungleichungen $x_i \le 1 - \epsilon x_{i-1}$ und r_i für die Ungleichungen $\epsilon x_{i-1} \le x_i$ in die Simplexform $(\hat{P})$.

(b) Man zeige, dass jede zulässige Basis sämtliche x_i und für jedes $i = 1, \ldots, n$ entweder s_i oder r_i enthält. (Hinweis: Wenn eine Variable nicht Null sein kann so muss sie in der Basis enthalten sein.) Ist das Problem entartet?

(c) Sei $L \subset N := \{1, \ldots, n\}$ und

$$J^L := \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{r_i \mid i \in L\} \cup \{s_i \mid i \in N \backslash L\}$$

eine zulässige Basis, sowie x^L die zugehörige Basislösung. Sei nun $n \in L$ und $n \notin L'$. Man zeige $x_n^{L'} < x_n^L$, und falls $L' := L \backslash \{n\}$, so gilt $x_n^{L'} = 1 - x_n^L$.

(d) Man ordne die Teilmengen von N derart an, dass $x_n^{L_1} \le x_n^{L_2} \le \ldots \le x_n^{L_{2^n}}$ gilt. Zeigen Sie unter Verwendung von c) und Induktion nach n, dass hier sogar strikte Ungleichungen gelten und für $j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ die Basislösungen $x_n^{L_j}$ und $x_n^{L_{j+1}}$ zulässig und benachbart sind.

(e) Man beweise mit $l_0 := 0$ und $L := \{l_1, \ldots, l_k\}$ ($l_1 < l_2 < \ldots < l_k$ und $0 \le k \le n$) dass

$$x_n^L = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \epsilon^{n-l_j}.$$

Man leite daraus ein Kriterium her, wann für benachbarte Basislösungen x und x' gilt $x_n > x_n'$.

(f) Seien die Variablen in der Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n, r_1, s_1,\ r_2, s_2,\ \ldots, r_n, s_n$ angeordnet. Die least-index-Pivotregel von Bland besteht darin, für den in die Basis aufzunehmenden Index stets den ersten möglichen zu wählen, d.h. $s = \min\{k \in K \mid \bar{c}_k < 0\}$.

Man zeige, dass die Simplexmethode unter Verwendung dieser Pivotregel *exponentiell viele Schritte* benötigt, um von der Startbasis $\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n\}$ zur Optimalbasis

$$\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_{n-1}, r_n\}$$

zu gelangen.

Bemerkung: Die exponentielle Laufzeit wurde in obigem Beispiel nur für eine ganz spezielle Pivotwahl im Simplexschritt gezeigt. Allerdings gibt es für viele der üblichen Pivotregeln Modifikationen des Beispiels, so dass die Simplexmethode zur Lösung des modifizierten Beispiels mit einer anderen Pivotregel ebenfalls exponentiell viele Schritte benötigt. Wählt man aber unter allen Pivotelementen mit profitablen Richtungen *zufällig* (gleichverteilt) ein Pivotelement aus, so ist die Methode im Mittel nach etwa n^2 Simplexschritten fertig!

Hinweis zur zweiten Programmieraufgabe:
Die Abgabefrist wird verlängert. Sie können Ihre Lösung der Programmieraufgabe bis zum 19.11.2025 um 12 Uhr im ILIAS hochladen.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 19.11.2025 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.