Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

Aufgabe	14	15	16	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 6. Übungsblatt

Aufgabe 14 (8 Punkte)

Gegeben seien zwei nicht leere, endliche, disjunkte Mengen von Punkten $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^N$. Wir sagen, die Hyperebene $\{p \in \mathbb{R}^N \mid v^\mathrm{T} p = d\}$ mit $v \in \mathbb{R}^N$ und $d \in \mathbb{R}$ "trennt K_1 von K_2 zum Niveau $\alpha \in \mathbb{R}$" , wenn $v^\mathrm{T} p \leq d - \alpha$ für alle $p \in K_1$ und $v^\mathrm{T} p \geq d + \alpha$ für alle $p \in K_2$ gilt. Gesucht sind nun die Werte von v und d, für die α möglichst groß wird, wobei zusätzlich $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \ldots, |v_N|\} \leq 1$ gelten soll.

(a) Sei (α^*, d^*, v^*) so, dass α^* maximal ist. (i) Ist $\alpha^* < 0$ möglich? (ii) Ist $v^* = 0$ möglich, wenn zusätzlich $\alpha^* > 0$ gelte?

(b) Geben Sie ein lineares Programm an, das diese Aufgabe löst, und zwar in der Form

$$\max\{b^\mathrm{T} y \mid A^\mathrm{T} y \leq c\}$$

für geeignete Daten $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie die Daten explizit an.

Aufgabe 15 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass (D_k) das duale lineare Programm von (P_k) für $k \in \{1, 2\}$ ist.

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$:

$$\min\{c^\mathrm{T} x \mid Ax \geq b,\ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{P_1}$$

$$\max\{b^\mathrm{T} y \mid A^\mathrm{T} y = c,\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m\}. \tag{D_1}$$

(b) Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$:

$$\min\{c^\mathrm{T} x \mid Ax = b,\ \alpha \leq x \leq \beta,\ x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{P_2}$$

$$c^\mathrm{T} \alpha + \max\{(b - A\alpha)^\mathrm{T} y + (\beta - \alpha)^\mathrm{T} z \mid A^\mathrm{T} y + z \leq c,\ z \leq 0,\ y \in \mathbb{R}^m,\ \ z \in \mathbb{R}^n\}. \tag{D_2}$$

Hinweis: Satz 3.7.8 der Vorlesung darf zur Lösung dieser Aufgabe genutzt werden, nicht aber der Dualitätssatz für allgemeine lineare Programme.

Aufgabe 16 (8 Punkte)

Betrachten Sie das primale lineare Programm (P) in der Standardform und das zugehörige duale Programm (D). Geben Sie für die nachfolgenden Fälle jeweils ein Beispiel an, falls sie auftreten können, andernfalls begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des Dualitätssatzes.

(a) $\max(\mathrm{D}) = -\infty$ und $\min(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}$,

(b) $\max(\mathrm{D}) = -\infty$ und $\min(\mathrm{P}) = +\infty$,

(c) $\max(\mathrm{D}) = +\infty$ und $\min(\mathrm{P}) = +\infty$.

Programmier-Aufgabe 3

Schreiben Sie eine Matlab/Python/R-Funktion

```
[x, y, s] = ipm(A, b, c, x0, y0, s0, mu0, tol),
```

welche zu einem linearen Programm der Form

$$\min\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

den unten stehenden Kurz-Schritt-Algorithmus ausführt.
Dabei ist `A` eine Matrix mit maximalem Spaltenrang; `b` und `c` sind passend dimensionierte Vektoren, `x0`, `y0` und `s0` sind passend dimensionierte strikt zulässige Startiterierte; und `tol` ist die Abbruchgenauigkeit.
Die Ausgabe `x`, `y` und `s` sind jeweils die letzten Iterierten.
Testen Sie Ihre Funktion an dem Problem

$$\begin{array}{rccccccccl}
\max & 2^{n-1}x_1 & + & 2^{n-2}x_2 & +\cdots+ & 2x_{n-1} & + & x_n & & \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 5^2 \\
 & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\
 & 2^n x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & +\cdots+ & 4x_{n-1} & + & x_n & \leq & 5^n \\
 & & & & & & & x & \geq & 0,
\end{array}$$

für $n \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ und quantifizieren Sie insbesondere Zulässigkeit und Optimalität. Die Funktion

```
[A b c x0 y0 s0 mu0] = kleeminty(n),
```

die Sie im ILIAS finden, generiert hierfür die Daten des auf Standardform transformierten LPs, sowie strikt zulässige Startiterierte (`x0`, `y0`, `s0`) auf dem zentralen Pfad.
Sie können Ihre Funktion zusätzlich mit

```
[A b c x0 y0 s0 mu0] = RandomTest(m,n)
```

an zufällig erzeugten Beispielen in Standardform testen. Die Genauigkeit `tol = 1e-6` ist für diese Programmieraufgabe ausreichend.
Für die Bearbeitung der Programmieraufgabe haben Sie zwei Wochen Zeit. Die Abgabefrist ist also am 03.12.2025 um 12 Uhr.

Kurz-Schritt-Algorithmus:

Es sei $x^0 > 0$, y^0, $s^0 > 0$ und μ_0 so gegeben, dass $Ax^0 = b$, $A^T y^0 + s^0 = c$, $\mathrm{Diag}(x^0)s^0 - \mu_0 e = r^0$ und $\|r^0\|_2/\mu_0 \leq \frac{1}{2}$ ist. *(Dies heißt, dass der Startpunkt relativ nahe am zentralen Pfad liegen muss.)* Es sei ferner eine gewünschte Genauigkeit $\mathtt{t}ol > 0$ vorgegeben. Setze $k = 0$.

1. Führe für einen Newton-Schritt gemäß
$$\begin{pmatrix} A & & \\ & A^T & I \\ \mathrm{Diag}(s^k) & & \mathrm{Diag}(x^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax^k \\ c - s^k - A^T y^k \\ \mu_k e - \mathrm{Diag}(x^k)s^k \end{pmatrix}.$$
aus, um $x^{k+1} = x^k + \Delta x$, $y^{k+1} = y^k + \Delta y$ und $s^{k+1} = s^k + \Delta s$ zu erhalten.
2. Verkleinere μ_k zu $\mu_{k+1} := \mu_k(1 - \frac{1}{6\sqrt{n}})$.
3. Setze $k = k + 1$.
4. Falls $\mu_k \leq \mathtt{tol}/n$, dann STOPP, sonst gehe zurück zu Schritt 1.

Bemerkung Die Dimension des linearen Gleichungssystems in Schritt 1 kann durch das Gaußsche Block-Eliminationsverfahren reduziert werden.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 26.11.2025 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.