Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

26.11.2025

Aufgabe	17	18	19	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 7. Übungsblatt

Aufgabe 17 (8 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Seien ferner

$$\mathcal{F} := \{(x,y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A^T y + s = c, x \geq 0, s \geq 0\}$$

die (primal-dual) zulässige Menge und

$$\mathcal{F}^\circ := \{(x,y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A^T y + s = c, x > 0, s > 0\}$$

die (primal-dual) strikt zulässige Menge. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$, so ist die Menge

$$\mathcal{M}(\alpha) := \{(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x^T s \leq \alpha \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } (x,y,s) \in \mathcal{F}\}$$

für alle $\alpha \geq 0$ beschränkt.
Bemerkung: Wie kann man für ein $(x,y,s) \in \mathcal{F}$ den Ausdruck $x^T s$ umformulieren?

Aufgabe 18 (8 Punkte)

In Anwendungen z. B. aus den Wirtschaftswissenschaften treten Probleme mit linearen Nebenbedingungen und gebrochen linearer Zielfunktion der Art

$$\min \left\{ \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \;\middle|\; x \in \mathcal{P} \right\} \tag{1}$$

mit $\mathcal{P} := \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ auf. Zur Lösung von (1) betrachten wir das Programm

$$\min \left\{ c^{\mathrm{T}} y + \alpha t \mid (y,t) \in \tilde{\mathcal{P}} \right\} \tag{2}$$

mit $\tilde{\mathcal{P}} := \{(y,t) \mid Ay = bt,\ d^{\mathrm{T}} y + \beta t = 1 \text{ und } (y,t) \geq 0\}$. Die Menge der Optimallösungen von (1) sei beschänkt und nicht leer. Des Weiteren gelte $d^{\mathrm{T}} x + \beta > 0$ für alle $x \in \mathcal{P}$. Man zeige:

(a) (2) besitzt eine Optimallösung und

(b) für jede Optimallösung $(\bar{y}, \bar{t})$ von (2) gilt $\bar{t} > 0$ und $\bar{y}/\bar{t}$ ist Optimallösung von (1).

Aufgabe 19 (8 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{array}{llcl} \min & x_1 + x_2 & & \\ & x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Geben Sie die Optimallösungen an.

(b) Bestimmen Sie den zentralen Pfad $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$.

(c) Existiert $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) = \lim_{\mu \to 0}(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$? Wenn ja, ist $\bar{x}$ eine optimale Basislösung?

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 03.12.2025 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.