Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

03.12.2025

Aufgabe	20	21	22	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 8. Übungsblatt

Aufgabe 20 (12 Punkte)

Wenden Sie das Simplex-Verfahren (Phase I und Phase II) auf die folgenden linearen Programme an:

(a)
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{u.d.N.} & \begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 & = & 6 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -1 \\ x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 8x_4 & = & 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0, \end{array} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{u.d.N.} & \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 9 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array} \end{array}$$

Bemerkung: Um die Korrektur einfach zu halten, wählen Sie in jedem Schritt als den eintretenden Nichtbasisindex s den kleinsten Index, für den die reduzierten Kosten negativ sind.

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = m$. Weiter seien $X, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definite Diagonalmatrizen. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{T}} & I \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

lösbar ist, und geben Sie die Lösung abhängig von $AS^{-1}XA^{\mathrm{T}}$ an.

Aufgabe 22 (6 Punkte)

Betrachten Sie die zu den Daten $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gehörigen linearen Programme

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0. \end{array}$$

und die entsprechenden Optimalitätsbedingungen

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} A^T y + s & = & c, & \\ Ax & = & b, & \\ x_i s_i & = & 0 & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x, s & \geq & 0 & \end{array} \right.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von $(*)$ konvex ist.

Programmier-Aufgabe 4

Implementieren Sie den Prädiktor-Korrektor-Algorithmus von Mehrotra (Algorithmus 4.7.1 aus der Vorlesung) in Matlab/Python/R und testen Sie ihn für $n = 4, 8, 16, 32, 64$ am linearen Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b,\ x \geq 0 \end{aligned}$$

mit folgenden Zufallsdaten:

$$A = [R, I_n],\ b = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,\ c = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+n},$$

wobei R eine $(n \times n)$-Matrix sei mit zufälligen Einträgen aus der Gleichverteilung auf dem Interval von 0 bis 1. Skalieren Sie das Problem zunächst so um, dass $\|b\|_2 = \|c\|_2 = 1$. Wählen Sie als Startpunkt `x0=s0` $= e$ und `y0` $= 0$, als Zielgenauigkeit `epsilon` $= 10^{-4}$ und `M` $= 10000$ als Schranke für $\|x\|$ und $\|s\|$.
Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
function [x,y,s] = mehrotra(A,b,c,x0,y0,s0,epsilon,M),
```

die das Mehrotra-Verfahren implementiert, eine Funktion

```
function [A,b,c,x0,y0,s0,epsilon,M] = testfunk(n),
```

die das Testproblem abhängig von der Dimension `n` aufbaut und ein Skript, welches das Testproblem für `n = 4,8,16,32,64` löst.
Für die Bearbeitung der Programmieraufgabe haben Sie zwei Wochen Zeit. Die Abgabefrist ist also am 17.12.2025 um 12 Uhr.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 10.12.2025 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.