Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Florian Jarre
Melinda Hagedorn

10.12.2025

Aufgabe	23	24	25	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 9. Übungsblatt

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Betrachten Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ für das Polynom

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(x_1^2 - 2x_2).$$

(a) Zeigen Sie: Für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat die Funktion $\lambda \mapsto f(\lambda d)$ in $\lambda^* = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle und es gilt $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda d) = \infty$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Punkt $x^* = 0$ ist eine Minimalstelle von f.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $\lim_{\|x\|_2\to\infty} f(x) = \infty$.

Aufgabe 24 (6 Punkte)

Sei ein schwach zusammenhängender Graph G mit n Knoten und $m = n$ Kanten durch seine Inzidenzmatrix A gegeben.
Man gebe ein Verfahren an, um in G einen (ungerichteten) Zyklus zu bestimmen.

Aufgabe 25 (12 Punkte)

Eine Matrix A heißt *total unimodular*, falls die Minoren von A nur die Werte -1, 0 oder 1 annehmen.

(a) Sei $A = (a_{jk})$ eine $m \times n$ Matrix mit folgenden Eigenschaften:

(i) $a_{jk} \in \{-1,\ 0,\ 1\}$ für $1 \le j \le m$ und $1 \le k \le n$;

(ii) in jeder Spalte von A stehen höchst. 2 von Null versch. Elemente;

(iii) die Zeilenindizes $\{1, \dots, m\}$ lassen sich in zwei disjunkte Mengen I_1 und I_2 einteilen, so dass gilt:

$$\begin{aligned} a_{jk} = a_{ik} \neq 0,\ i \neq j \quad &\Rightarrow \quad j \in I_1 \text{ und } i \in I_2 \text{ oder umgekehrt} \\ a_{jk} = -a_{ik} \neq 0,\ i \neq j \quad &\Rightarrow \quad i, j \in I_1 \text{ oder } i, j \in I_2. \end{aligned}$$

Man zeige, dass A unimodular ist.

(b) Man zeige, dass die Matrix A des Transshipmentproblems (vgl. Kapitel 5.2 im Skript) unimodular ist.

(c) Sei A eine unimodulare $m \times n$ Matrix mit $\text{Rang}(A) = m$ und b ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten. Man zeige, dass jede Basislösung von $Ax = b$ ganzzahlig ist.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 17.12.2025 12 Uhr abgeben. Doppelabgaben sind erlaubt.