Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. FLORIAN JARRE

13.11.2026

Optimierung II, Zusatzaufgabe

Zusatzaufgabe

Sei $V := \mathbb{R}^m$, $W := \mathbb{R}^n$ und $\| \cdot \|_V$ bzw. $\| \cdot \|_W$ eine Norm auf V bzw. W. Sei ferner $m, n \geq 2$ und sei $\| \cdot \|_F$ die Frobeniusnorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Man zeige: Egal wie die Normen $\| \cdot \|_V$ und $\| \cdot \|_W$ gewählt sind, die Identität $\|A\|_F = \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_V}{\|z\|_W}$ kann nicht für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ erfüllt sein.

Hilfs-Aufgabe 1

Man zeige, dass für $y \in \mathbb{R}^n$ durch $\|y\|_{*,W} := \sup_{z\neq 0} \frac{|y^T z|}{\|z\|_W} = \max_{\|z\|_W=1} z^T y$ eine Norm definiert ist, die sogenannte duale Norm.

Man zeige ferner, dass die Duale der dualen Norm die Ausgangsnorm ist.
(Man zeige: Für gegebene $y, z \neq 0$ ist

$$(*) \qquad \sup_{u\neq 0} \frac{|y^T u|}{|z^T u|} = \begin{cases} |\lambda| & \text{falls } y = \lambda z \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Und für $y \in \mathbb{R}^n$ zeige man

$$\sup_{u\neq 0} \frac{|y^T u|}{\|u\|_{*,W}} = \ldots = \sup_{u\neq 0} \inf_{\|z\|_W=1} \frac{|y^T u|}{|z^T u|} \leq \inf_{\|z\|_W=1} \sup_{u\neq 0} \frac{|y^T u|}{|z^T u|} = \|y\|_W,$$

wobei die letzte Gleichung folgt, da wegen $(*)$ bei der Infimumbildung nur die Wahl $z = \pm y/\|y\|_W$ möglich ist. Diese Wahl zeigt auch, dass die Ungleichung durch eine Gleichung ersetzt werden kann.)

Hilfs-Aufgabe 2

Die Eulidische Norm ist selbstdual.

Nun zur Zusatzaufgabe:

Widerspruchsannahme: Es gilt die Identität $\|A\|_F = \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_V}{\|z\|_W}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Seien dann $x \in V$, $y \in W$ beliebig gegeben. Man zeige einerseits

$$\|xy^T\|_F = \|x\|_V \max_{z\neq 0} \frac{|y^T z|}{\|z\|_W} = \|x\|_V \|y\|_{*,W},$$

und andererseits

$$\|xy^T\|_F = tr(xy^T yx^T)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Da das bei festem $y \neq 0$ für alle x gilt, ist $\| \cdot \|_V$ ein positives Vielfaches $\mu \| \cdot \|_2$ von $\| \cdot \|_2$ und analog ist $\| \cdot \|_{*,W}$ ein positives Vielfaches $1/\mu \| \cdot \|_{*,W}$ von $\| \cdot \|_2$, denn $\|x\|_V \|y\|_{*,W} = \|x\|_2 \|y\|_2$. Bei der Bildung der Dualen der dualen Norm geht der Skalierungsfaktor $1/\mu$ der Norm $\| \cdot \|_{*,W}$ in den Faktor μ bei der Norm $\| \cdot \|_W$ über. Man begründe, dass daher $\mu = 1$ gewählt werden kann. Und da die Euklidische Norm selbstdual ist, gelte also $\| \cdot \|_V = \| \cdot \|_2$ und $\| \cdot \|_W = \| \cdot \|_2$. Man zeige nun den gesuchten Widerspruch anhand einer Matrix A, die überall Null ist bis auf eine 2×2-Einheitsmatrix im 2×2-Bock oben links.

Bemerkung: Noch gibt ChatGPT auf die Frage nach einem Beweis, dass die Frobeniusnorm keine induzierte Norm sein kann, einen fehlerhaften Beweis...