Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
1.1 Modellbildung, mathematische Formulierung 1
1.2 Nichtlineare Programme 2
1.3 Einteilung von nichtlinearen Programmen 3
1.4 Ausblick 4
1.5 Zur Anwendung in der Praxis 5

Teil I Lineare Programmierung

2 Lineare Programme, Beispiele und Definitionen 9
2.1 Definition und Anwendungen 9
2.2 Das Diätproblem 10
2.3 Beispiel zum Flugplanentwurf 12
2.4 Die Standardform 13
2.5 Geometrische Grundlagen 16

3 Das Simplexverfahren 23
3.1 Lineare Gleichungssysteme und Basen 23
3.2 Das spezielle Simplexformat 26
3.3 Durchführung der Simplexmethode 31
3.3.1 Benachbarte Basen 31
3.3.2 Abbruchkriterien 34
3.3.3 Geometrische Interpretation 36
3.3.4 Simplexschritt 36
3.3.5 Allgemeine Simplexmethode 39
3.4 Die lexikographische Simplexmethode 41
3.5 Ein Hilfsproblem für den Startpunkt 44
3.6 Zusammenfassung 46
3.7 Dualität bei linearen Programmen 48
3.7.1 Der Dualitätssatz 48
3.7.2 Duale Simplexmethode 54
3.8 Beispiel für eine Sensitivitätsanalyse 58
3.9 Übungsaufgaben 63

4 Innere - Punkte - Methoden für Lineare Programme 67
4.1 Exkurs: Newton -Verfahren, Konvergenzraten 68
4.1.1 Anwendung: Newton -Verfahren 69
4.1.2 Konvergenzgeschwindigkeiten, O - Notation 71
4.2 Der Innere - Punkte -Ansatz 72
4.2.1 Das primal - duale System 73
4.2.2 Der zentrale Pfad 74
4.2.3 Newton -Verfahren für das primal - duale System 77
4.2.4 Lösung der linearen Gleichungssysteme 77
4.3 Analyse des Newton - Schrittes 79
4.4 Ein Kurz - Schritt - Algorithmus........................... 80
4.5 Konvergenz von Innere - Punkte -Verfahren 82
4.6 Zur Konvergenzrate des Kurz - Schritt -Verfahrens 85
4.7 Ein praktisches Innere - Punkte -Verfahren 88
4.8 Ein Trick zur Berechnung von Startpunkten 93
4.8.1 Selbstduale lineare Programme 93
4.8.2 Zusammenhang mit anderen linearen Programmen.... 94
4.9 Übungsaufgaben 97

5 Lineare Optimierung: Anwendungen, Netzwerke 101
5.1 Das Transportproblem 101
5.1.1 Problemstellung und Grundbegriffe der Graphentheorie 101
5.1.2 Simplexverfahren zur Lösung des Transportproblems .. 108
5.2 Das Transshipment - Problem 113
5.3 Bestimmung kürzester und längster Wege in einem Netzwerk . 117
5.3.1 Reduktion auf ein Transshipment - Problem 117
5.3.2 Die Methode von Dantzig 117
5.3.3 Der Algorithmus von Dijkstra...................... 119
5.3.4 Die Methode von Fulkerson 120
5.4 Übungsaufgaben 122

Teil II Nichtlineare Minimierung I

6 Minimierung ohne Nebenbedingungen 127
6.1 Minimierung skalarer Funktionen, direkte Suchverfahren 129
6.1.1 Das Verfahren des goldenen Schnitts zur Bestimmung des Minimums einer unimodalen Funktion 130
6.1.2 Verallgemeinerung auf stetiges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 132
6.2 Nichtrestringierte Minimierung, Abstiegsmethoden 135
6.2.1 Einfache Grundlagen.............................. 135
6.2.2 Einige negative Beispiele 136
6.2.3 Abstiegsverfahren 139
6.2.4 Steilster Abstieg für konvexe quadratische Funktionen . 146
6.3 Konjugierte - Gradienten Verfahren (cg -Verfahren) 148

6.3.1 Präkonditionierung ... 153
6.3.2 Das Verfahren von Polak-Ribière ... 154
6.4 Trust-Region Verfahren zur Minimierung ohne Nebenbedingungen ... 155
6.5 Das Newton-Verfahren ... 163
6.5.1 Der Satz von Newton-Kantorovich ... 163
6.5.2 Affine Invarianz ... 169
6.5.3 Interpretation des Newton-Verfahrens als Trust-Region Verfahren ... 172
6.6 Quasi-Newton-Verfahren ... 173
6.6.1 Nichtlineare Gleichungssysteme ... 173
6.6.2 Minimierung glatter Funktionen ... 177
6.7 Nichtlineare Ausgleichsprobleme ... 184
6.7.1 Gauß-Newton-Verfahren ... 186
6.7.2 Quasi-Newton Ansatz für Ausgleichsprobleme ... 189
6.8 Ein praktisches Anwendungsbeispiel ... 191
6.9 Übungsaufgaben ... 194
6.9.1 Allgemeine Aufgaben ... 194
6.9.2 Aufgaben zum Satz von Newton Kantorovich ... 196

Teil III Optimalitätsbedingungen

7 Konvexität und Trennungssätze ... 203
7.1 Allgemeine Grundlagen ... 204
7.2 Trennungssätze ... 209
7.2.1 Schwache Trennungssätze ... 209
7.2.2 Das relativ Innere einer konvexen Menge ... 211
7.2.3 Eigentliche Trennung ... 214
7.3 Polare Kegel und konvexe Funktionen ... 216
7.4 Übungsaufgaben ... 220

8 Optimalitätsbedingungen für konvexe Optimierungsprobleme ... 223
8.1 Konvexe Ungleichungssysteme ... 223
8.2 Die KKT-Bedingungen ... 228
8.3 Die Lagrangefunktion ... 230
8.4 Dualität bei konisch konvexen Programmen ... 233
8.5 Dualität bei semidefiniten Programmen ... 237
8.6 Übungsaufgaben ... 241

9 Optimalitätsbedingungen für allgemeine Optimierungsprobleme ... 243
9.1 Optimalitätsbedingungen erster Ordnung ... 243
9.1.1 Tangentialkegel und Regularität ... 243

9.1.2 Der Satz von Kuhn und Tucker 249
9.1.3 Beweis von Satz 9.1.14 250
9.2 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung 256
9.3 Sensitivität der Lösungen 263
9.4 Übungsaufgaben 269

Teil IV Nichtlineare Minimierung II

10 Projektionsverfahren 273
10.1 Allgemeine Konvergenzeigenschaften 275
10.2 Der Spezialfall affiner Nebenbedingungen 282
10.3 Quadratische Optimierungsprobleme 286
10.4 Übungsaufgaben 291

11 Penalty-Funktionen und die erweiterte Lagrangefunktion . 293
11.1 Straffunktionen und Penalty-Verfahren 293
11.2 Differenzierbare exakte Penalty-Funktionen 298
11.3 Übungsaufgaben 312

12 Barrieremethoden und primal-duale Verfahren 315
12.1 Klassische Barrieremethoden 315
12.1.1 Das Konzept der Barrieremethoden 315
12.1.2 Ein allgemeines Barriereverfahren 316
12.2 Ein Primal-Duales Innere-Punkte-Verfahren 319
12.3 Beziehungen zwischen beiden Verfahren 321
12.3.1 Vergleich der Newton-Schritte 322
12.3.2 Unterschiede bei beiden Verfahren 324
12.4 Übungsaufgaben 325

13 SQP-Verfahren 327
13.1 Der SQP-Ansatz 328
13.2 Quasi-Newton-Updates 330
13.3 Konvergenz 332
13.3.1 Modifikation zur globalen Konvergenz 333
13.3.2 Der Maratos-Effekt 336
13.3.3 Schlussbemerkung 337
13.4 Übungsaufgaben 338

14 Global konvergente Verfahren 339
14.1 Trust-Region-Methoden II 339
14.2 Filter-Verfahren 349
14.3 Übungsaufgaben 353

15 Innere-Punkte-Verfahren für konvexe Programme 355
15.1 Theoretische Grundlagen 355
15.1.1 Ein konvexes Programm und Voraussetzungen 356
15.1.2 Die Methode der Zentren 357
15.1.3 Selbstkonkordanz 359
15.1.4 Assoziierte Normen zu selbstkonkordanten Barrierefunktionen 364
15.1.5 Das Newton-Verfahren zur Minimierung selbstkonkordanter Funktionen 368
15.1.6 θ-selbstkonkordante Barrierefunktionen und äußere ellipsoidale Approximationen 371
15.1.7 Ein einfacher Modellalgorithmus 377
15.2 Ein implementierbares Verfahren 382
15.2.1 Probleme mit linearen Gleichungen als Nebenbedingungen 382
15.2.2 Die Berücksichtigung linearer Gleichungen im Newton-Verfahren 383
15.2.3 Berechnung eines strikt zulässigen Startpunktes 386
15.2.4 Ein primaler Prediktor-Korrektor-Algorithmus 389
15.2.5 Einige Anwendungen 393
15.3 Übungsaufgaben 395

16 Semidefinite Programme 403
16.1 Notation und einige Grundlagen 403
16.1.1 Ein semidefinites Programm und seine duale Form 404
16.1.2 Darstellung des zentralen Pfades 406
16.2 Ein primal-duales Verfahren 407
16.2.1 Bestimmung der Newtonrichtungen 408
16.2.2 Die Klasse MZ 408
16.2.3 Numerischer Aufwand zur Lösung der linearen Gleichungssysteme 410
16.2.4 Einige spezielle Suchrichtungen 412
16.2.5 Skalierungsinvarianz 415
16.2.6 Konvergenz eines Kurzschrittverfahrens 416
16.3 Anwendungen 417
16.3.1 Lyapunovungleichung 417
16.3.2 Strikte Matrixungleichungen 419
16.3.3 Eigenwertoptimierung 419
16.3.4 Das Schurkomplement 420
16.3.5 Ein Rezept zur Lagrangedualität 421
16.4 Anwendungen auf kombinatorische Probleme 426
16.4.1 Das Problem der maximalen stabilen Menge 427
16.4.2 Das Max-Cut Problem 434
16.4.3 Das Graphenpartitionierungsproblem 442
16.4.4 Lineare 0-1-Programme 444

16.4.5 Nichtlineare semidefinite Programme 447
16.5 Übungsaufgaben 451

17 Direkte Suchverfahren bei mehreren Variablen 453
17.1 Die „Simplexmethode“ von Nelder und Mead 453
17.2 Das Kriging-Verfahren 456
17.2.1 Modellbildung 457
17.2.2 Minimierungsschritt 460
17.3 Übungsaufgaben 461

Literaturverzeichnis 463

Index 471